ISSN : 2656-7172 Vol. 1 No. 1 (April, 2019) THETA JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA

OPERASI SPESIAL MATRIKS BINER

(Special Operation Biner Matrices)

Ahmad Lazwardi

Prodi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Banjarmasin
Email: lazwardiahmad@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui rumus khusus dari matriks biner mengenai identifikasi dan pemodelan objek dinamis menggunakan matriks biner. Metode penelitian ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan beberapa informasi sebelumnya tentang sifat-sifat matriks biner dan menghasilkan operasi baru dan kesetaraan. Hasil dari penelitian ini adalah definisi memperbesar, memperkecil, dan beberapa hubungan relasi ekivalensi khusus.

Kata kunci : Matriks Biner, Operasi Spesial

ABSTRACT

This paper was purposed to find out the special formula of binary matrices regarding about identifying and modelling dynamical object by binary matrices. The method of this research is study of literature by collecting some previous information about binary matrices properties and generating the new operation and equivalences. The result of this research is definition of zooming in, zooming out, and several special equivalence relations.

Keywords : Binary Matrix, Special Operation

PENDAHULUAN

Banyak fenomena lingkungan di sekitar kita yang hanya mempunyai dua bentuk dasar, dimana bentuk itu terkadang saling berkebalikan satu sama lain. Sebagai contoh, adalah lukisan surialis, permainan tetris, rekaman video monochrome dan lain-lain. Pada contoh-contoh di atas, semua hanya terdiri dari dua jenis objek. Pada lukisan surialis, hanya terdiri dari dua warna, yaitu hitam dan putih. Pada permainan tetris dalam video game, tampilan layar game hanya terdapat dua kemungkinan, yaitu ruang yang terisi dengan box tetris atau ruang yang kosong. Atau tampilan video monokrom sebelum ditemukannya kamera berwarna. Masih banyak kasus lainnya seperti perputaran jarum jam, susunan mobil dalam suatu tempat parkir dll. (Miettinen 2012) menjelaskan bahwa matriks biner sangat bermanfaat dalam menganalisis data mining. (Shitov 2013) menjelaskan pemanfaatan matriks biner menggunakan rank tropical dan rank determinantal.

KONSEP MATRIKS BINER

Definisi 1.1: Matriks biner adalah matriks yang entrinya hanya 0 atau 1. Himpunan seluruh matriks biner dinotasikan dengan ρ (Hume 1997).

Berikut adalah operator special pertama dari matriks biner.

Definisi 1.2: Pemetaan $Fr:\rho \to \mathrm{N}\times\mathrm{N}$ yang memasangkan tiap matriks biner dengan ordenya disebut Frame. Lebih jelasnya untuk setiap $A\in\rho$ dengan $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ berlaku $Fr(A)=(m,n)$.

Terkadang matriks biner ditulis $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$ hanya dengan notasi *A* saja, tetapi terkadang ditulis A_n^m untuk mengindikasikan bahwa matriks biner tersebut memiliki ordo $m\times n$.

Entri 1 pada suatu matriks biner disebut *unsur*, jumlah semua unsur dalam matriks biner disebut *objek visual.*

Definisi 1.3: (**Ekuivalensi 1**)Untuk setiap $A,B\in\rho$, $A\approx_1 B$ jika objek visual *A* = objek visual *B*.

Ekuivalensi 1 menghasilkan partisi-partisi dalam ρ. Akibatnya dapat didefinisikan kelas-kelas ekuivalensi matriks biner sebagai berikut:

Definisi 1.4: Diberikan A matriks biner. Kelas ekuivalensi 1 *A* adalah $[A]_1=\{B\in\rho : A\approx_1 B\}$. Matriks biner *B* disebut *rekonstruksi A* jika $B\in[A]_1$.

DINAMIKA MATRIKS BINER

Definisi 2.1: Suatu pemetaan $f:\{A\}\to[A]_1$ disebut *dinamika A*.

Salah satu dinamika matriks biner yang paling sederhana adalah proses *zooming out* suatu objek visual dari layar tampilannya. Proses tersebut dimodelkan oleh definisi berikut:

Definisi 2.2: Diberikan $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$. Pemetaan $ZOX_1:\{A\}\to\{A'\}$ dengan $A'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & a_{m1} & \dots & a_{mn} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$ disebut *zooming out A orde 1*. Dalam hal ini dapat ditulis $ZOX_1(A)=A'$. Untuk *zooming out A orde n* didefinisikan dengan cara mencover matriks biner *A* dengan *n* lapis entri-entri 0.

Dari definisi di atas didapatkan sebuah sifat aljabar sebagai berikut:

$$ZOX_m(ZOX_n(A))=ZOX_{m+n}(A)$$

Jika ada proses *zooming out* tentu anda bertanya, apakah proses *zooming out* mempunyai proses kebalikan *invers*. Dalam seni fotografi, *zooming in* bisa dilakukan selama objek visual yang kita perbesar **tidak terpotong**. Dalam hal ini, proses *zooming in* dimodelkan dengan definisi berikut:

Definisi 2.3: Jika matriks biner *A* berbentuk $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & a_{m1} & \dots & a_{mn} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$ maka dapat didefinisikan *zooming in A orde 1* sebagai:

$$ZOX_1^{-1}(A)=ZOX_{-1}(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Proses *zooming* akan merubah ordo dari matriks biner. Relasi antara proses *zooming* dengan frame dijelaskan oleh teorema berikut;

Teorema 2.4: Diberikan A_n^m matriks biner. Berlaku:

- $FrZOX_k(A) = (m+k+1, n+k+1)$ untuk setiap $k \in N$
- Jika $ZOX_{-k}(A)$ ada maka $FrZOX_{-k}(A) = (m-k-1, n-k-1)$ untuk setiap $k \in N$

Sebelum membahas teorema selanjutnya, terlebih dahulu dibahas notasi entri matriks yaitu jika *A* adalah matriks, maka notasi $A_{i,j}$ maksudnya adalah entri ke-*ij* dari matriks *A*.

Teorema selanjutnya menjelaskan kondisi matriks biner ditinjau per entri nya setelah dilakukan proses *zooming*.

Teorema 2.5: Diberikan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ matriks biner. Berlaku:

- Untuk setiap $k \in N$, berlaku $a_{ij} = ZOX_k(A)_{i+k, j+k}$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$.
- Untuk setiap $k \in N$, jika $ZOX_{-k}(A)$ ada maka $a_{ij} = ZOX_{-k}(A)_{i-k, j-k}$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$.

Proses *zooming* yang sudah dipelajari mempermudah kita untuk memperketat relasi ekuivalensi yang sebelumnya menjadi relasi ekuivalensi tingkat selanjutnya, yang diharapkan akan membuat subpartisi-subpartisi baru sehingga matriks biner menjadi lebih mudah dianalisis. Untuk mencapai tujuan tersebut, dipelajari beberapa aturan berikut:

Definisi 2.6: Diberikan *A* matriks biner. Matriks biner mutlak *A* adalah $|A| \in [A]_1$ sehingga $|A| = ZOX_{-k}(A)$ untuk suatu *k* dan $ZOX_1^{-1}(|A|)$ tidak ada.

Contoh: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mempunyai $|A| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Definisi 2.7: Untuk setiap $A, B \in \rho$. Matriks biner *A* dikatakan **ekuivalen 2** dengan *B* jika $|A| = |B|$. Dalam hal ini dinotasikan dengan $A \approx_2 B$.

Jelas ekuivalensi 2 adalah relasi ekuivalensi (Buktikan).

Definisi 2.6. akan *well defined* jika kita dapat menjamin bahwa setiap matriks biner *A* mempunyai matriks biner mutlak yang tunggal. Untuk mencapai tujuan itu, diperlukan beberapa teorema berikut:

Teorema 2.8: Untuk setiap $A \in \rho$, $|A|$ tunggal.

Bukti: Diambil sebarang $A \in \rho$, jika *A* = **0** maka jelas terbukti. Jika tidak demikian, katakan terdapat $|A|, |A'|$ yang merupakan matriks biner mutlak *A*. Katakan $|A| = ZOX_{-k}(A)$ dan $|A'| = ZOX_{-l}(A)$, maka jelas *k* = *l*. Karena *Zooming* merupakan pemetaan, akibatnya $|A| = |A'|$.

Lemma 2.9: Diberikan $A \in \rho$ yang tidak matriks **0**. Jika matriks biner $B = |A|$ maka terdapat entri *B* yang paling samping yang merupakan unsur dari *B*.

Sebaliknya belum tentu benar.

Entri paling samping dari suatu matriks orde $m \times n$ adalah entri dari baris atau kolom ke-1 atau baris atau kolom ke-*n.*

Bukti: Andaikan tidak demikian, maka matriks *B* mempunyai bentuk

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & b_{m1} & \dots & b_{mn} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Akibatnya $ZOX_1^{-1}(B)=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\neq |A|$

kontradiksi.

Definisi 2.7 mempartisi ρ menjadi beberapa kelas ekuivalensi yang lebih detil. Hal ini dipaparkan melalui definisi berikut;

Definisi 2.10: Diberikan $A\in\rho$. Kelas ekuivalensi 2 dari *A* adalah $[A]_2=\{B\in\rho : B\approx_2 A\}$.

Dua definisi ekuivalensi yang sudah dibahas memberikan konsekuensi berupa akibat berikut:

Akibat 2.11: Untuk setiap $A\in\rho$. Berlaku $[A]_2\subset[A]_1$. Sebaliknya belum tentu benar.

MATRIKS BINER BERKEBALIKAN

Pada bab ini, dibahas dinamika matriks biner yang berkaitan dengan kasus matriks biner yang terdiri dari dua komponen yang saling berkebalikan. Sebagai contoh, kasus peletakan kartu remi, posisi *face-up* merupakan kebalikan dari posisi *face-down*. Dua kali membalik kartu remi akan menjadikan kartu kembali ke posisi semula.

Untuk memodelkan fenomena ini, kita memerlukan operasi yang berperilaku seperti operasi negasi pada logika.

Definisi 3.1: Didefinisikan operasi biner siklik sebagai berikut;

1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 0 + 0 = 0.

Sekarang siap untuk dianalisis matriks biner untuk kepentingan kasus dua objek berkebalikan.

Definisi 3.2: Untuk setiap

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\rho.$$

Negasi *A* didefinisikan sebagai

$$\sim A=\begin{pmatrix} a_{11}+1 & \dots & a_{1n}+1 \\ & & \\ a_{m1}+1 & \dots & a_{mn}+1 \end{pmatrix}.$$

Secara intuitif, negasi dari matriks biner adalah matriks biner baru yang menvisualisasi suatu objek dengan warna yang berlawanan.

OPERASI BINER ANTAR MATRIKS BINER

Berikut adalah beberapa operasi biner

Definisi 4.1: (Penjumlahan) Untuk setiap

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\in\rho.$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}\in\rho.$$

Definisi 4.2: (Pelapisan) Untuk setiap

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\in\rho.$$

$$A\{B\}=\begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ & & \\ \delta_{m1} & \dots & \delta_{mn} \end{pmatrix}$$ dengan

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & jika\ a_{ij}=1\ atau\ b_{ij}=1 \\ 0 & lainnya \end{cases}.$$

Jelas objek visual $A\{B\}$ tidak lebih kecil dari objek visual *A* dan objek visual *B*.

Operasi pelapisan bersifat komutatif, asosiatif, adanya identitas, tetapi tidak ada invers.

Definisi 4.3: (Pelepasan) Untuk setiap $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \rho$.

Berlaku,

$$A\}B\{=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ & & \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

dengan $\lambda_{ij}=\begin{cases} a_{ij} & jika\ b_{ij}=0 \\ 0 & lainnya \end{cases}$.

Perlu diperhatikan dalam hal ini operasi pelapisan dan operasi pelepasan dua matriks tidak saling invers. Dengan kata lain matriks A yang dilapis B kemudian dilepas B nya belum tentu sama dengan A lagi.

OPERASI ANTAR ENTRI MATRIKS BINER

Definisi 5.1: Diberikan $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \\ & a_{ij} & a_{ij+1} & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$ matriks biner.

Translasi vertikal entri *ij* adalah

$$V_{ij}(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{ij} & a_{ij} & \\ & a_{i-1j} & a_{i-1j} & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definisi 5.2: Diberikan $A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \\ & a_{ij} & a_{ij+1} & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$ matriks biner.

Translasi Horizontal entri *ij* adalah

$$H_{ij}(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \\ & a_{ij+1} & a_{ij} & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sifat 5.3: Untuk setiap $A\in\rho$ berlaku:

- $V_{ij}V_{ij}(A)=A$
- $H_{ij}H_{ij}(A)=A$

$$V_{ij}H_{ij}V_{ij}(A)=H_{ij}V_{ij}H_{ij}(A)$$

REFERENSI

Hume, David. 1997. “Properties of a Standard Form for a Boolean Matrix.” 3795.

Miettinen, Pauli. 2012. “Boolean Matrix Factorization.”

Shitov, Yaroslav. 2013. “On the Complexity of Boolean Matrix Ranks.” 439: 2500–2502.